

系組：資訊科學系三年級

日期節次：7 月 29 日第 3 節 13:30-14:50

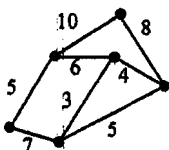
科目：離散數學 (65-141)

1. 用 the generalized De Morgan Laws for logic 求下列命題(proposition)的否定命題
 - 10% (a) $\forall x \exists y \forall z \neg P(x, y, z)$ ，式中 $\neg P(x, y, z)$ 是命題函數 $P(x, y, z)$ 的否定命題。
 - (b) $\forall x \forall y (x^2 < y + 1)$
2. (a) 數列 x 的定義為 $x_1=2, x_n=3+x_{n-1}$ ，而 $c_n = \sum_{k=1}^n x_k$ ，試用一僅有 n 為變數的數式表示 c_n 。
 - 10% (b) 重寫數式 $\prod_{k=0}^n kr^{n-k}$ ，將指標(Index) k 由 j 取代， k 與 j 的關係式為 $k=j-1$ 。
3. 分別就下列關係 R_1 和 R_2 ，判斷其滿足反身性(reflexivity)、對稱性(symmetry)、反對稱性(antisymmetry)、和遞移性(transitivity)中的哪些特性。
 - 10% (a) $(x, y) \in R_1$ if 2 divides $x + y$, where x and y are positive integers (正整數).
 - (b) $(x, y) \in R_2$ if 3 divides $x + y$, where x and y are positive integers.
4. 假設 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一個數列，遞迴關係式是將 a_n 以前面的項表示之， $\forall n=0, 1, 2, \dots$ 。
 - 10% (a) 某人以年利率 12% 向銀行借貸 1000 元，以複利計算，令 a_n 表示 n 年後需償還的金額，試列出 a_n 的遞迴關係式(recurrence relation)。
 - (b) 令 a_n 表示某牧場第 n 年的乳牛總數，以 $a_n - a_{n-1}$ 表示於第 n 年乳牛增加數，若牧場每年的乳牛增加數是前一年的 5 倍，已知 $a_0=3$ 和 $a_1=7$ ，試求第 n 年的乳牛總數。(列出遞迴關係式，並求解)
5. (a) 調查 10 位學生修課的情況，其中 6 人選修物理、4 人選修化學、2 人既不選物理也不選化學，試問有幾人既選修物理也選修化學？
 - 10% (b) 將 10 個蘋果分給 4 個小朋友，若每個小朋友至少分一個，那麼有多少種分法？
6. (a) 假設 k 是一個正整數，試求 $1^k + 2^k + \dots + n^k$ 以 n 為參數的 Big O、Big Omega、及 Big Theta，亦即求 O 、 Ω 、及 Θ 。
 - 10% (b) 在下列演算法中，根據 $x = x + 1$ 的計算次數，試求此演算法的複雜度為何？以 Θ 描述之，並以 n 為參數。

```

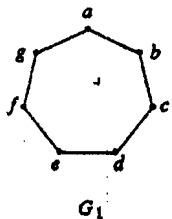
i = n
while (i ≥ 1) {
    for j = 1 to n
        x = x + 1
    i = ⌊i/2⌋
}
    
```

7. (a) 有一棵樹，其中有 $2n$ 個節點的 degree 為 1， $3n$ 個節點的 degree 為 2， n 個節點的 degree 為 3，試問這棵樹有多少個節點？有多少個邊(edge)？
 - 10% (b) 試找出下圖的最小生成樹的重量(the weight of the minimal spanning tree)。

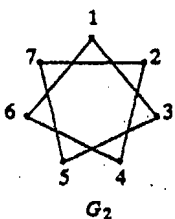


10% 8. 就下列(a)(b)(c)(d)(e)各小題判斷圖 G_1 與 G_2 是否同構(isomorphic)? 若同構, 找出其節點對應關係。

(a)

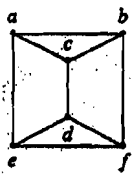


G_1

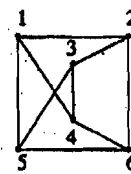


G_2

(b)

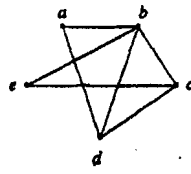


G_1

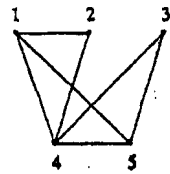


G_2

(c)

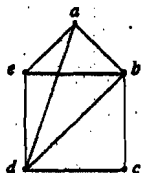


G_1

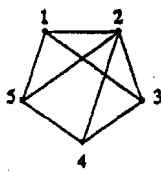


G_2

(d)

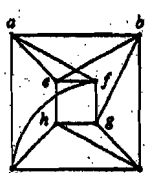


G_1

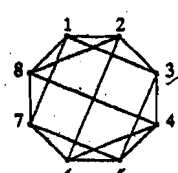


G_2

(e)

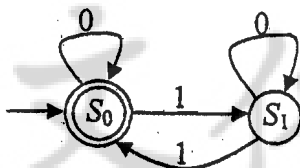


G_1



G_2

10% 9. (a) 下列是有限狀態機 M 的狀態轉換圖(state transition diagram), 試找出其可接受的字串集合, 字串是由數字 $\{0, 1\}$ 組成。



(b) 試設計一具有 5 個狀態的有限狀態機(以狀態轉換圖描述之), 用以偵測(或接受)由字母 $\{a, b\}$ 組成的字串, 其字串結尾是 aa 或 bb 。(假設 5 個狀態是 $S_0, S_1, S_2, S_3,$ 和 S_4 , 而 S_0 是初始狀態)

10% 10. (a) 根據下列邏輯表, 找出布林函數(Boolean function) $f(x, y, z)$ 之分離正規型(disjunctive normal form)。

(b) 再用卡諾圖(Karnaugh Map)求得最佳簡化布林表示式(Boolean expression)。

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0